

Wie kommt der Zufall in die Mathematik?

Rüdiger Inhetveen, Erlangen

Um von einem Zufallsexperiment sprechen zu können, muß folgendes vorliegen: eine experimentelle Anordnung, die in allen relevanten Einzelheiten beschreibbar ist, mit deren Hilfe man ferner Versuche eines bestimmten Typs vornehmen kann, die beliebig oft wiederholbar sind und die zu präzise beschreibbaren Resultaten führen. Der Gedanke des Zufalls kommt insofern ins Spiel, als sich die Resultate bei sukzessiven Wiederholungen desselben Versuchstyps in unvorhersehbarer Weise ändern.

WOLFGANG STEGMÜLLER

Zusammenfassung

Zu einer Begründung der Wahrscheinlichkeitstheorie gehört eine korrekte Einführung des Zufallsbegriffs. Ein kleiner Gang durch die Geschichte der Wahrscheinlichkeitstheorie soll zeigen, daß die heuristischen Leitvorstellungen der Rede vom Zufall zwar weitgehend konstant geblieben sind (Meyers Konversations-Lexikon von 1878: „Zufall (lat. Casus), im gewöhnlichen Leben alles, was uns nicht notwendig oder beabsichtigt erscheint, oder für dessen Eintreten wir einen Grund nicht nachweisen können, oder was ebenso gut in anderer Weise und zu anderer Zeit hätte geschehen können“), die Frage nach ihrer Realisierung durch Zufallsgeneratoren aber stets durch den Verweis auf Glücksspiele als erledigt betrachtet wurde. Das gilt auch für die Gegenwart fast uneingeschränkt und läuft darauf hinaus, daß die Mathematik für ihre Teildisziplin Wahrscheinlichkeitstheorie letztlich Anleihen bei der Physik machen muß. Einen von diesem Mangel freien Zugang zum Zufall bietet ein geeigneter Rückgriff auf neuere Ergebnisse der sogenannten Chaostheorie. Eine kleine Skizze der entsprechenden Ideen beschließt den Vortrag.

1 Einleitung

Wenn man ein modernes Lehrbuch der Wahrscheinlichkeitstheorie zur Hand nimmt und im Stichwortverzeichnis nach dem Wort „Zufall“ sucht, dann wird man meist nicht auf die allerersten Seiten verwiesen. Es ist heute Standard, zunächst einige andere Begriffe — es seien nur Sigma-Ring, Wahrscheinlichkeitsraum und Wahrscheinlichkeitsverteilung als Beispiele genannt — zu definieren, ehe die Rede eher beiläufig auf „zufällige Variable“ kommt, so wie in dem folgenden Zitat aus einem Standardlehrbuch [Kri63, S. 30]:

Eine zufällige Variable x ist hiernach, in anschaulicherer Sprache, eine Größe, die bei jeder zufälligen Beobachtung einen davon abhängenden reellen Wert annimmt, [...] kurz gesagt, eine Größe, die vom Zufall abhängt.

Das ist natürlich keine *Definition* des Zufalls. Hier wird vielmehr davon ausgegangen, daß man schon ein gewisses Verständnis dafür mitbringt, wann ein Ereignis zufällig zu nennen ist und wann nicht.

Nun haben wir im normalen Alltagsleben mit der Rede vom Zufall in der Regel keinerlei Probleme. „Zufällig“ wird einfach das Unerwartete und daher Unvorhersehbare genannt. Gegen diese stillschweigend befolgte Gebrauchsregel zu verstoßen, erzeugt allenfalls Verwunderung, die freilich bis zur Komik gesteigert werden kann. KARL VALENTIN hat dafür ein schönes Beispiel hinterlassen, [Sch78, S. 318].

Schwieriger ist es schon, dieses stillschweigende Vorverständnis in Bedingungen zu übersetzen, die vorliegen müssen, damit wir zu Recht von Zufall sprechen. Ob wir einen objektiven oder einen subjektiven Zufallsbegriff haben, wird mit derlei Bedingungen schon mitentschieden, und wenn sich Philosophen an einer solchen Explikation beteiligen, dann gibt es meistens ... Streit! Physiker haben sich an diesem Streit nicht recht beteiligen wollen, und Mathematiker meinten häufig, daß sie in der Physik — seit den Zeiten von CLAUSIUS und MAXWELL, also grob seit etwa 1860 – eine Hauptanwendung der Wahrscheinlichkeitstheorie zu sehen hätten, und deshalb ebenso objektivistisch sein sollten wie die Physiker. M. VON SMOLUCHOWSKI hat deren Position in einem Aufsatz aus dem Jahre 1918 ganz lapidar formuliert ([vS88], S.82):

Die physikalische Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses kann nur von den Bedingungen abhängen, welche sein Zustandekommen beeinflussen, aber nicht von dem Grade unseres Wissens!

Ein Beispiel für in diesem Sinne nicht durch subjektives Wissen beeinflussbare Ereignisse bieten Glücksspiele, die ja auch historisch ein Anlaß für die Beschäftigung mit Problemen der Wahrscheinlichkeitsrechnung waren.

2 Glücksspiele und Zufall

Glücksspiele reichen weit in die Frühgeschichte der Menschheit zurück.¹ Ihren Namen haben sie daher, daß die Spieler Glück haben können, aber nicht müssen. Ob sie Glück haben, hängt eben vom Zufall ab. Die alten Griechen hatten übrigens für Zufall, Glück und Unglück ein gemeinsames Wort, nämlich τύχη, das konsequenterweise auch noch Schicksal bedeutet. Daß Glücksspiele zuweilen in einem sehr ernsten Sinn Schicksalsspiele sein können, soll hier nicht weiter interessieren. Daß Glücksspiele aber jedenfalls Zufallsspiele sind, wollen wir ausdrücklich festhalten. Etwas lapider könnte man sagen: Der Zufall hat seinen „Sitz im Leben“ in der Gestalt des Glücksspiels. So gesehen ist jedes Glücksspiel ein Verfahren, um *Zufall zu erzeugen*, oder etwas genauer: um zufällige Ereignisse zu erzeugen. Solche Verfahren nennt man in der Wissenschaftstheorie – und nicht nur dort – Zufallsgeneratoren, und an diesen Sprachgebrauch werde ich mich im folgenden auch halten.

So klar und selbstverständlich es immer war, daß Glücksspiele Zufallsgeneratoren sind, so präsent war auch immer die Kenntnis, daß der so bemühte Zufall manipuliert werden kann. In einen Text des PSEUDO-OVID aus der Mitte des 13. Jhs. heißt es dazu ganz drastisch²:

¹ Auch im Neuen Testament ist davon die Rede, z.B. Matth. 27,35.

² De Vetula, auszugsweise nachgedruckt in [Sch88, S.5 - 8]

Es gibt da also nicht allein den Zufall; ich sage dir aber in wenigen Worten, daß darin der Zufall stecken muß, wenn das Glück dir oder deinen Kameraden den besseren Wurf zugesteht.

Du antwortest, daß es in dem Spiel eine Art Begabung des Würelns gibt, die den Zufall ausschließt, ich aber sage dir darauf: wenn du recht würfelst, wird er einen gewissen Einfluß haben, wenn du aber anders als recht würfelst, dann begehst du darum einen Betrug, weshalb seitens deines Mitspielers, wenn er es gemerkt hat, Beschimpfungen folgen; man flucht drauflos, die Schmähungen mehren sich, nach den Beschimpfungen prügelt man sich mit Fäusten, rauft einander die Haare, und dann folgt des kleinen Messers verwegener Stich. Es steckt allein der Zufall drin – dem nur der Dumme folgt!

Wenn du das Glück nennst, wird das blinde Glück sich nicht gegen alle ohne Unterschied gleich verhalten; denn wenn du vom Glück begünstigt bist, wird es ein anderer noch mehr als du sein. Weder kannst du vor allen der Glückliche sein, noch kennst du die Geschicke der Menschen; es folgt also, daß es auf den Zufall hinausläuft -- dem nur der Dumme folgt.

Lassen Sie uns den hier deutlich erhobenen pädagogischen Zeigefinger einmal ignorieren und die Botschaft etwas trockener reformulieren: Ein Spiel, also auch ein Glücksspiel, muß fair gespielt werden. Das erscheint in unserem Zitat gewissermaßen als eine „Anstandsregel der Dummen“, aber auch der Versuch, die Mathematik zu einer Behandlung von Glücksspielproblemen heranzuziehen, kommt ohne diese Voraussetzung nicht aus. In der technischen Sprache der modernen Wissenschaftstheorie liest sich diese Voraussetzung so: Ein Zufallsgenerator muß korrekt bedient werden. In der Sprache der sog. Glücksspielrechnung, die im 13. Jh. entsteht und im 17. Jh. ihren Höhepunkt hat, ist das gleiche gemeint, wenn vom *Prinzip des fairen Spiels* oder der fairen Wette die Rede ist³.

Was sind das nun für Probleme, derer sich die Glücksspielrechnung annimmt? Ich zitiere – stellvertretend für die meisten anderen Texte – aus einer Abhandlung des LUCA PACIOLI aus dem Jahre 1494:

Eine Gesellschaft spielt Ball auf 60 <Punkte>, <wobei> 10 Punkte für das Einzelspiel <vergeben werden>.

Sie setzen <insgesamt> 10 Dukaten ein. Aufgrund gewisser Umstände können sie nicht zu Ende spielen; dabei hat eine Partei 50 und die andere 20 <Punkte>. Man fragt, welcher Anteil des Einsatzes jeder Partei zusteht.

Schon bei CARDANO findet sich für die Lösung dieses Problemtyps ein -- wie er es selbst nennt -- *allgemeines Prinzip*: „... daß wir die Gesamtzahl aller möglichen Würfe in Betracht ziehen und auf wie viele Weisen und in welcher Anzahl jene <günstigen> Würfe eintreten können; dann vergleicht man diese Anzahl mit dem Rest der Gesamtheit aller möglichen Würfe und wird, damit sie unter gleicher Bedingung wetten, die Einsätze entsprechend diesem Verhältnis wechselweise tätigen.“

Wer von Ihnen sich auch nur flüchtig mit dem Wahrscheinlichkeitsbegriff befaßt hat, wird in dieser Formulierung unschwer die klassische „Definition“ der Wahrscheinlichkeit erkennen: Die Wahrscheinlichkeit für ein Ereignis ist die Anzahl der günstigen Möglichkeiten, geteilt durch die Anzahl aller Möglichkeiten.⁴ Und Cardanos Prinzip lautet dann, daß der Einsatz im Verhältnis der Wahrscheinlichkeiten zu teilen ist.

In einem berühmt gewordenen Briefwechsel aus dem Jahre 1654 zwischen PIERE DE FERMAT und BLAISE PASCAL über Probleme der Glücksspielrechnung wird dieses Prinzip an vielen Einzelfällen besprochen

³ Der Sache nach findet sich das Prinzip des fairen Spiels explizit schon in GERONIMO CARDANOS Traktat „De ludo aleae“ aus der Mitte des 16. Jhs., der allerdings erst 1663 gedruckt erschien [Sch88, S.2ff.].

⁴ „Definition“ ist hier in Anführungszeichen gesetzt, weil es sich genau genommen nicht um eine Definition handelt. Hier wird nämlich nicht gesagt, was eine Wahrscheinlichkeit ist, sondern nur, wie man sie in einfachen Fällen berechnet. Vgl. [Rén72, S. 82].

und auf einige kompliziertere Fälle, wie den von mehr als zwei Mitspielern, erweitert. Der Problembereich der Glücksspielrechnung ist damit erfolgreich und erschöpfend behandelt: Man kannte Zufallsgeneratoren in Gestalt des Glücksspiels, man kannte das Prinzip des fairen Spiels und man wußte, wie ein vorher gemachter Einsatz bei vorzeitigem Spielabbruch gerecht zu teilen war. Der Zufallsbegriff selbst war aber weiter ungeklärt, er war – genau betrachtet – nicht einmal zu einem Problem geworden.

3 Die klassische Wahrscheinlichkeitsrechnung

Ein historisch von der Glücksspielrechnung unabhängiger Zugang zur Wahrscheinlichkeitsrechnung liegt in der praktisch-ethischen Frage, wie wir vernünftig mit künftigen Ereignissen umgehen sollen, deren Eintreten wir zwar für „unwahrscheinlich“ halten, die wir aber mit hohen Nutzenerwartungen verbinden. Diese Frage tritt in ganz unterschiedlichen Gewand auf. Bei PASCAL hat sie im Hinblick auf die ewige Glückseligkeit, die uns im Paradies erwartet, die Gestalt einer Empfehlung: Wenn es um ein unendlich hoch zu bewertendes Gut geht, für das die Wahrscheinlichkeit, es zu erlangen, zwar sehr klein, aber nicht null ist, dann sollen wir es in jedem Falle anstreben⁵.

Bei Leibniz wiederum stehen für ähnliche Überlegungen die Bereiche Jurisprudenz oder auch Medizin im Vordergrund, wo es darum geht, anhand von Indizien bzw. Symptomen auf die Wahrscheinlichkeit der Täterschaft bzw. einer Diagnose zu schließen. Ihm schwebte vor, die hierfür erforderlichen Analysen des Wahrscheinlichkeitsbegriffs in einer eigenen „doctrina de gradibus probabilitatis“ zusammenzufassen. Sein Wunsch ist — nebenbei bemerkt — in der Form in Erfüllung gegangen, daß die moderne Entscheidungstheorie sich auf probabilistischer Grundlage mit solchen „Entscheidungen unter Risiko“ befaßt.

Diese und andere Diskussionsbeiträge zum Wahrscheinlichkeitsbegriff — die auch vor dem Hintergrund des Probabilismustreits in der katholischen Moralthologie zu sehen sind — waren der zweite wichtige Argumentationsstrang, der neben der Glücksspielrechnung zur ersten Fassung einer Wahrscheinlichkeitsrechnung durch JAKOB BERNOULLI führte: die 1713 in Basel erschienene „*Ars conjectandi*“. Ausdrücklich geht BERNOULLI gleich im ersten Kapitel dieses Werkes, bei der Vorstellung seines Begriffs von Sicherheit, auf den theologischen Kontext ein:

Alles, was unter der Sonne be- und entsteht, Vergangenes, Gegenwärtiges und Zukünftiges, beansprucht an sich und objektiv immer den höchsten Grad der Sicherheit. Für gegenwärtige und vergangene Ereignisse steht dies fest, da sie ja gerade durch den Umstand, daß sie sind oder gewesen sind, nicht nicht sein oder gewesen sein können. Auch für zukünftige Ereignisse steht zweifelsfrei fest, daß sie in gleicher Weise, wenn auch nicht mit der unausweichlichen Notwendigkeit des Fatums, so doch wegen der göttlichen Voraussicht und Vorherbestimmung eintreten werden müssen. Wenn nämlich die wie auch immer gearteten zukünftigen Ereignisse nicht sicher eintreten werden, so bleibt unklar, wie dem höchsten Schöpfer der uneingeschränkte Ruhm der Allwissenheit und Allmacht zugebilligt werden kann⁶.

Es folgen eine Reihe von Begriffsbestimmungen, wie sie dem Stil — wenn auch nicht der Art — nach auch in modernen Lehrbüchern anzutreffen sind (Wahrscheinlichkeit, wahrscheinlicher als, moralisch sicher, zufällig), von denen die letzte hier ebenfalls zitiert sei, weil sie ja direkt unser Thema berührt:

Zufällig sowohl im Sinn von frei, d.h. von der Willensentscheidung eines rationalen Geschöpfes

⁵ Vgl. die Einführung zu Kapitel 2 von [Sch88].

⁶ zitiert nach [Ber88, S. 62ff]

abhängig, als auch im Sinn des aufs Geratewohl, d.h. des von Nebenumständen Bestimmten, ist das, was nicht sein, nicht werden oder nicht gewesen sein könnte, wohlgermerkt aufgrund einer fernliegenden, nicht der nächstliegenden Verwirklichungsmöglichkeit; das Zufällige schließt nämlich nicht immer jede Notwendigkeit hinsichtlich der sekundären Ursachen aus, was ich an Beispielen erklären werde. Ein Würfel kann mit absoluter Sicherheit zu dem Zeitpunkt, zu dem er die Hand des Werfenden verläßt, bei gegebener Lage, Geschwindigkeit und Abstand vom Spielbrett nicht anders fallen, als er tatsächlich fällt.

Vermutlich sind Sie von dieser Definition nun nicht gerade begeistert, und ich muß gestehen, daß ich es auch nicht bin. Es fällt nur auf, daß die Realisierung von Zufällen ganz selbstverständlich wieder mit einem Glücksspielgerät vorgenommen wird. Der Kern des mit der Definition Gemeinten scheint sich aber weitgehend mit dem zu decken, was man heute *kontingent* nennt, nämlich ein Ereignis, dessen Eintreten weder notwendig noch unmöglich ist. Auf die Frage, ob man gut daran tut, Kontingenz und Zufall gleichzusetzen — und in der Alltagssprache tun wir das ständig und umstandslos —, werde ich später noch zurückkommen.

Ich möchte aber noch ein wenig bei der BERNOULLISCHEN *ars conjectandi* verweilen, weil ihr ein ganz anderes Verdienst zukommt, als eine brauchbare Definition des Zufalls. BERNOULLI hat in dieser Schrift zum ersten mal das bewiesen, was man heute das „Gesetz der großen Zahlen“ nennt. Und die Worte, mit denen er es ankündigt, lassen keinen Zweifel zu, daß er sich über die Bedeutung dieses Satzes vollkommen im Klaren war. Er sagt:

... was sich der Bestimmung a priori entzieht, läßt sich schließlich *a posteriori*, d.h. aus der oftmaligen Beobachtung des Ereignisses unter ähnlichen Umständen, ermitteln, weil man annehmen muß, daß jedes <Ereignis> künftig in so vielen Fällen eintreten oder nicht eintreten kann, wie vorher bei einem ähnlichen Stand der Dinge festgestellt wurde, daß es eingetreten oder nicht eingetreten war.

Man sagt dafür heute kurz und bündig: Die relativen Häufigkeiten eines Ereignisses konvergieren mit Wahrscheinlichkeit eins gegen die a priori Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses. Dieser Satz, nach dem sich, wie Bernoulli sagt, „jedermann im täglichen Leben beständig richtet“, stellt also eine Brücke her zwischen einer meßbaren Häufigkeit und einer unbekanntenen Wahrscheinlichkeit.

4 Axiomatisierung versus Begründung

Der eben erwähnte Brückenschlag fand nach und nach in der Physik seine produktive Nutzung, in deren Mittelpunkt die statistische Mechanik in Gestalt der kinetischen Gastheorie bis zum Ende des vorigen Jahrhunderts stehen sollte. Diese Entwicklung ist verbunden mit den Namen RUDOLPH CLAUSIUS, JAMES CLERK MAXWELL, LUDWIG BOLTZMANN, MAX PLANCK und vielen anderen. Der systematische Gedanke, der hinter diesen erfolgreichen Bemühungen steckte, läßt sich vereinfacht so ausdrücken: Wenn wir uns ein Gas als eine große Menge frei umherschwirrender und dabei häufig zusammenprallender Atome vorstellen, dann können wir in diesem Bild die Wahrscheinlichkeitsrechnung anwenden, wenn wir so tun, *als ob jeder Zusammenstoß von zwei (oder mehr) Gasteilchen ein Zufallsmechanismus ist*. Ich habe mich hierbei bewußt vorsichtig ausgedrückt, indem ich formulierte, daß wir „so tun, als ob.“ Die Physik des 19. Jhs. war größtenteils viel realistischer. Für sie *waren* diese Stöße zufällig. Was aber der Zufall war, das war noch immer nicht geklärt.

Doch um die Jahrhundertwende bot sich auf einmal eine völlig neue Strategie, dieses Problem anzugehen. Um sie zu würdigen, muß man zuerst einmal zur Kenntnis nehmen, daß das letzte Drittel des 19.

Jhs. in der Mathematik zu ständig schärferen Anforderungen an die Strenge mathematischer Beweise gelangt war und in dieser Absicht mit der Axiomatisierung mathematischer Teiltheorien begonnen worden war. Den Anfang dieser Bewegung hatten RICHARD DEDEKIND und GIUSEPPE PEANO mit einer Axiomatisierung der Arithmetik gemacht. GOTTLIB FREGE legte ein Axiomensystem der Logik vor, in der Meinung, daß die Arithmetik sich ganz auf die Logik gründen lasse. (Vorangegangen waren Versuche zur Axiomatisierung der Logik durch GEORGE BOOLE). Und schließlich arbeitete DAVID HILBERT in seinen 1899 erschienen „Grundlagen der Geometrie“ nicht nur eine Axiomatik der Geometrie aus, sondern lieferte dazu noch eine „Philosophie der impliziten Definition“, die ihn bald in eine heftige Polemik mit FREGE führen sollte.

Hilberts Position lautete also kurz und bündig: man gebe ein ordentliches Axiomensystem für die Wahrscheinlichkeitstheorie an, dann ist der Zufallsbegriff implizit mitdefiniert. In seinem bis auf den heutigen Tag berühmten Pariser Vortrag von 1900 über „Mathematische Probleme“ formuliert er dieses Vorhaben unter der Überschrift „Mathematische Behandlung der Axiome der Physik“ als Problem Nummer 6 wie folgt:

Durch die Untersuchungen über die Grundlagen der Geometrie wird uns die Aufgabe nahegelegt, nach diesem Vorbilde diejenigen physikalischen Disziplinen axiomatisch zu behandeln, in denen schon heute die Mathematik eine hervorragende Rolle spielt; dies sind in erster Linie die Wahrscheinlichkeitsrechnung und die Mechanik.

Was die Axiome der Wahrscheinlichkeitsrechnung angeht, so scheint es mir wünschenswert, daß mit der logischen Untersuchung derselben zugleich eine strenge und befriedigende Entwicklung der Methode der mittleren Werte in der mathematischen Physik, speziell in der kinetischen Gastheorie Hand in Hand gehe.⁷

Offenbar dem damaligen Zeitgeist in der Mathematik entsprechend, wurde diese Aufgabe zunächst in Form von Dissertationen angepackt (RUDOLF LAEMMEL, Zürich 1904, UGO BROGGI, Göttingen 1907). Doch die gestellte Aufgabe erwies sich als nicht ganz einfach, was unter anderem damit zusammenhing, daß sie sich nicht auf anerkannte Standardlehrbücher stützen konnte, wie es bei der Axiomatisierung der Arithmetik und der Geometrie der Fall gewesen war. Erst im Jahre 1933 gelang es dem Russen ANDREJ KOLMOGOROFF, ein im wesentlichen heute noch verbindliches Axiomensystem der Wahrscheinlichkeitsrechnung anzugeben. Erst seit dieser Zeit spricht man dann auch von einer Theorie und nicht mehr von Wahrscheinlichkeitsrechnung. Was aber der Zufall ist, war dadurch noch immer nicht geklärt.

Ein erster vielversprechender Versuch, das Zufallsproblem im Rahmen einer Axiomatisierung anders als durch eine implizite „Definition“ anzugehen, findet sich in einer Arbeit, die RICHARD VON MISES 1919 unter dem Titel „Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung“ im Band 5 der Mathematischen Zeitschrift veröffentlichte. Er beginnt mit einer verhalten formulierten Kritik an den Arbeiten seiner Vorgänger⁸:

Die bisher unternommenen Versuche einer mathematischen Begründung der Wahrscheinlichkeitsrechnung [...] scheinen mir durchaus im Formalen stecken geblieben zu sein. Der vorliegende Versuch geht von der Auffassung aus, daß die Wahrscheinlichkeitsrechnung eine Naturwissenschaft gleicher Art wie die Geometrie oder die theoretische Mechanik ist. Sie hat das Ziel, die Zusammenhänge und Abhängigkeiten bestimmter, beobachtbarer Erscheinungen wiederzugeben, nicht als getreues Abbild der Außenwelt, sondern als deren Abstraktion und Idealisierung. Sie muß dabei von logisch eindeutigen Begriffskonstruktionen ausgehen, bei deren Aufbau die Rücksicht auf das darzustellende Objekt der Außenwelt maßgebend ist.

⁷ Vgl. [Hil71, S. 47]

⁸ zitiert nach [vM19, S. 378]

Eine solche „eindeutige“ Konstruktion legt er dann für seinen zentralen Begriff *Kollektiv* vor. Ich möchte die entsprechenden Definitionen hier nicht zitieren, weil sie ein wenig technisch sind, sondern Ihnen statt dessen mit eigenen Worten zu nagen versuchen, worum es geht.

VON MISES geht aus von unendlichen Folgen gedachter Dinge und stellt sich vor, daß jedem dieser Dinge genau eines von endlich vielen Merkmalen zukommt. Wenn auch Sie sich dabei etwas vorstellen wollen, dann denken Sie am besten an eine unendliche Folge von Würfeln eines Würfels. Jedem solchen Wurf kommt dann genau ein Merkmal, nämlich die erzielte Augenzahl zu. Weiter verlangt VON MISES, daß nicht allen gedachten Dingen — oder allen bis auf endlich viele Ausnahmen — dasselbe Merkmal zukommen soll; d.h. in unserem Beispiel, daß nicht von einer bestimmten Stelle an nur noch das Ergebnis „Augenzahl = 4“ auftreten soll. Das klingt plausibel, weil wir einen solchen Würfel vermutlich schon lange, bevor wir mit ihm im Unendlichen angekommen sind, einfach als untauglich weglegen würden. Und schließlich nennt von Mises eine solche Folge ein *Kollektiv*, wenn sie zwei Axiome erfüllt, die er kurz „I Existenz der Grenzwerte“ und „II Regellosigkeit der Zuordnung“ nennt. Das erste Axiom will ich hier nicht näher erläutern. Es soll im wesentlichen sicherstellen, daß die oben erwähnte Brücke zwischen Theorie und Praxis im Sinne BERNOULLIS geschlagen werden, also das Gesetz der Großen Zahlen bewiesen werden kann.

Für unser Thema viel interessanter ist die zweite Forderung. Sie besagt im Kern das folgende: wenn wir aus der gedachten ursprünglichen Folge nach einer *zulässigen* Vorschrift Teil- oder Auswahlfolgen bilden, dann sollen diese Teilfolgen die gleichen Eigenschaften haben, wie die ursprüngliche Folge: die „Existenz der Grenzwerte“ soll weiter gelten, und die neuen Grenzwerte sollen mit den alten in bestimmten Verhältnissen stehen. Und nun in seinen eigenen Worten:

Wir bezeichnen jede solche Auswahl, die ohne Benützung der Merkmalunterschiede der auszuwählenden Elemente eine unendliche Teilfolge erzeugt, als eine „zulässige“ Auswahl. Die Forderung II besagt dann, daß durch eine „zulässige Auswahl“ die Verhältnisse der Grenzwerte nicht verändert werden.

Eine den Forderungen I und II genügende Zuordnung zwischen den Elementen einer unendlichen Folge (den Zahlen der natürlichen Zahlenreihe) und den Punkten des k -dimensionalen Raumes nennen wir eine *zufallsartige*. Wir können daher auch sagen: *Ein Kollektiv ist eine unendliche Folge von Elementen mit zufallsartiger Zuordnung von Merkmalen an die einzelnen Elemente.*

Da ist er also endlich, der nicht einfach vorausgesetzte, sondern definierte Zufallsbegriff. In salopper Sprechweise wiederholt, heißt eine Folge nach von Mises *zufällig*, wenn sie jeden zulässigen Auswahltest besteht. Hinter diesem Zufallsbegriff steckt ein wirklich grundsätzlich neuer Gedanke, der nämlich, nicht mehr sagen zu wollen, wann ein einzelnes Ereignis zufällig ist⁹, sondern wann eine ganze unendliche Folge von Ereignissen als zufällig angesehen werden soll. Diese neue Wendung des Problems hat Auswirkungen bis in die Gegenwart. Im Rahmen der sogenannten algorithmischen Komplexitätstheorie bilden eine Reihe von im Detail raffinierten und technisch aufwendigen Verbesserungen der VON MISESschen Idee einen wichtigen Gegenstand mathematischer Forschung.¹⁰ Daß es zu diesen Forschungen kam, ist dabei nicht nur der Mathematikergewohnheit zu verdanken, *alles* zu verallgemeinern, sondern es hat einen systematischen Grund. Im Jahre 1939 hat J. VILLE¹¹ nachgewiesen, daß es Folgen gibt, die zwar der VON MISESschen Definition genügen, aber gleichzeitig ein anerkanntes Gesetz der Wahrscheinlichkeitstheorie nicht erfüllen. Damit war gezeigt, daß der zur Debatte stehende Vorschlag zwar nicht im Ansatz verfehlt, aber in einem

⁹ genauer: zufällig erzeugt ist

¹⁰ Namen, die hier zu nennen wären, sind C.P. SCHNORR, P. MARTIN-LÖF, G.J. CHAITIN und viele andere. Eine anspruchsvolle Monographie zu diesem Forschungsfeld haben kürzlich MING LI und PAUL VITÁNYI vorgelegt: [LV93].

¹¹ Vgl. [Vil39]

für die damaligen und heutigen Wahrscheinlichkeitstheoretiker präzisen Sinn unangemessen war. Er mußte einfach verbessert werden!

Was aber Mathematiker eine „Verbesserung“ nennen, ist in den Augen grundlagenorientierter Philosophen zuweilen durchaus eine „Verschlimmbeserung“. Die formal-axiomatisch eingestellte Mathematik der Gegenwart findet nichts auszusetzen an dem ersten VON MISESSchen Axiom, das von einer unendlichen Folge mit bestimmten Konvergenzeigenschaften ausgeht. Der grundlagenorientierte Philosoph fragt sich aber, was es denn heißen könne, eine solche Folge sei „gegeben“. Für ihn ist eine Folge gegeben, wenn er ein *Verfahren* kennt, diese Folge Glied für Glied auch zu Papier zu bringen. Diese Forderung nach der Existenz eines Verfahrens läßt sich häufig sehr leicht erfüllen. Wer etwa die Folge aller ungeraden natürlichen Zahlen angeben soll, der wird sagen: „Beginne mit 1; und wenn du irgendeine ungerade Zahl erzeugt hast, dann addiere 2, um die nächste zu erhalten“. Genau diese Möglichkeit, sich eine Folge zu verschaffen, scheidet aber bei den Kollektiven des Herrn VON MISES aus: eine so gegebene Folge wäre nicht mehr zufällig, weil es ja ein *Bildungsgesetz* gibt.

Wenn wir aber den anderen Weg gehen, und uns die Folge nicht durch eine *mathematische*, sondern durch eine *technische* Vorschrift verschaffen wollen — wenn wir also die Folge etwa mit einem Würfel erzeugen — ja, dann werden wir nie fertig! Wir werden nie soweit kommen, auch nur die erste Forderung zu überprüfen, die VON MISES an ein Kollektiv stellt. Davon abgesehen: auch die zweite Forderung können wir in keinem konkreten Fall überprüfen, weil es leider unendlich viele Arten gibt, zulässige Teilfolgen zu bilden.

Kurzum: Der Begriff der Zufälligkeit, wie ihn von Mises vorschlägt, erlaubt uns in keinem konkreten Fall zu sagen: „Jawohl, diese Folge hier ist definitiv zufällig“. Nur das Gegenteil läßt sich manchmal definitiv zeigen.¹²

Es mögen Überlegungen dieser Art gewesen sein, die PAUL LORENZEN dazu veranlaßt haben, sich der Frage nach dem Zufall durch eine Rückbesinnung auf die schon einleitend angesprochenen Zufallsgeneratoren zu nähern. Dabei hat er nun nicht — dem Beispiel der Tradition folgend — einfach gesagt: „Zufallsgeneratoren sind: Würfel, Roulette, Urne mit Kugeln etc., kurz: alle guten Glücksspielgeräte.“, sondern er hat heute¹³ so genannte *Gerätefunktionsnormen* angegeben. Genauer hat er folgendes gesagt:¹⁴

Ein Gerät heiße ein „Zufallsgenerator“, wenn es den folgenden Forderungen genügt:

- (1) *Eindeutigkeit*: Jede Benutzung des Gerätes (jeder „Versuch“) ergibt als Resultat genau eine von endlich vielen Aussageformen E_1, \dots, E_m („Elementarereignisse“).
- (2) *Ununterscheidbarkeit*: Mit keinem Kausalwissen läßt sich ein Grund angeben, der eines der Resultate E_1, \dots, E_m vor einem anderen auszeichnet.
- (3) *Wiederholbarkeit*: Nach jedem Versuch ist das Gerät wieder im selben Zustand wie vor dem Versuch.

Zur Begründung der Wahrscheinlichkeitstheorie nehmen wir das (historische) Faktum hinzu, daß in unserer Kultur „technisch gute“ Zufallsgeneratoren hergestellt werden. Es gibt keine „vollkommenen“ Zufallsgeneratoren, aber hinreichend gute Realisierungen der idealen Normen der Eindeutigkeit, Ununterscheidbarkeit und Wiederholbarkeit.

Und LORENZEN merkt noch an, daß wir über die mit einem Zufallsgenerator erzeugte Aussage $E_m(x_0)$

¹² Derselbe Einwand trifft im übrigen auch alle Zufallsbegriffe, die im Rahmen der erwähnten Komplexitätstheorie entstanden sind.

¹³ seit der Wortprägung durch PETER JANICH

¹⁴ Vgl. [uOS75, S. 245]

mehr wissen, „als daß [sie] kontingent ist. Es sei vorgeschlagen, die Aussagen $E(x)$ „total-kontingent“ oder kürzer „zufällig“ zu nennen.“

Damit haben wir einen weiteren Kandidaten auf der Suche nach einem zufriedenstellenden Zufallsbegriff: Zufällig heißt ein Ereignis, wenn es zufällig erzeugt ist; und dies wiederum heißt: wenn es mit einem Zufallsgenerator in Sinne von PAUL LORENZEN erzeugt ist. Natürlich stellt sich sofort die Frage, ob die Einwände, die sich gegen den Vorschlag von VON MISES ergeben haben, hier überwunden sind. Und auf den ersten Blick scheint es auch so. Von einer prinzipiell nicht überprüfbaren Konvergenzbedingung ist keine Rede. Die zweite Forderung Lorenzens aber, die Ununterscheidbarkeit, sollte uns stutzig machen. Es ist da davon die Rede, daß es „mit keinem Kausalwisse“ möglich sein soll, ein Ergebnis vor einem anderen auszuzeichnen.

Auf den zweiten Blick ist diese Forderung zwar immer noch plausibel, sie hat aber doch zwei kleine Schönheitsfehler. Zum einen ist es so, daß sich unser Kausalwissen im Laufe der (Kultur-)geschichte ständig erweitert hat und es keinen Grund zu der Annahme gibt, daß in diesem Prozeß ein Ende erreicht sei. Das hat zur Folge, daß ein auf das Kausalwissen gestützter Begriff ein *historisch veränderlicher Begriff* ist. Und dies wiederum heißt: Mit einer nach LORENZENS Vorschlag aufgebauten Wahrscheinlichkeitstheorie laufen wir Gefahr, daß einige der Ergebnisse dieser Theorie selbst historisch veränderlich werden. Mit der vielgepriesenen „ewigen Wahrheit mathematischer Erkenntnisse“ wäre also in der Wahrscheinlichkeitstheorie möglicherweise Schluß. Daß dieser Einwand letztlich nur das Problem der Realisierung von Zufallsgeneratoren berührt, nicht aber die Ergebnisse der auf die obige Definition gestützten Wahrscheinlichkeitstheorie, kann an dieser Stelle nur angemerkt werden.

Der zweite Schönheitsfehler ist allerdings noch gewichtiger. Er besteht darin, daß LORENZEN überhaupt auf Kausalwissen bezug nimmt. Das ist etwas der Mathematik als Formalwissenschaft ganz und gar Fremdes. Sie war gewohnt, sich ihre Gegenstände immer selbst zu erzeugen. Das gilt für die natürlichen Zahlen, von denen RICHARD DEDEKIND sagte, sie seien „freie Schöpfungen des menschlichen Geistes“ (Ich bemerke in Klammern, daß sich der Standpunkt LEOPOLD KRONECKERS: „Die natürlichen Zahlen hat der liebe Gott gemacht, alles andere ist Menschenwerk“ in dieser Frage nicht durchgesetzt hat.), und es gilt, wie LORENZEN in seinen Werken zu den Grundlagen der Mathematik selbst gezeigt hat, für praktisch die gesamte höhere Mathematik.¹⁵

Nun muß man einräumen, daß dies vielleicht der Preis ist, den man dafür zu zahlen hat, daß man den Zufall gewissermaßen „mathematisch bändigen“ will. Gewicht bekommt der ganze Einwand also erst, wenn man eine Alternative angibt, die das Positive des fraglichen Vorschlags wahrt und seine Nachteile zugleich überwindet.

5 Chaos, Mathematik und Zufall

Die fragliche Alternative beruht auf einer innermathematischen Entwicklung, für die es — wie man hinterher bemerkte — frühe Vorläufer gab, die aber Beachtung erst seit den frühen Siebziger Jahren fand. JIM YORKE, ein Angewandter Mathematiker der University of Maryland publizierte 1975 (zusammen mit T. LI) im *American Mathematical Monthly* einen kleinen Aufsatz mit dem Titel *Period three implies chaos*. Das erwähne ich hier, weil es nach meiner Kenntnis die Stelle ist, an der dieses neue Forschungsgebiet seinen Namen erhielt. Zwar versteht man unter Chaos in der Mathematik nicht mehr genau das, was YORKE vor nunmehr zwanzig Jahren damit meinte — der Begriff wird mittlerweile etwas schärfer gefaßt — aber man

¹⁵ Die Einschränkung „praktisch“ bezieht sich darauf, daß es in der modernen Mathematik Bereiche gibt, die sich einem konstruktiven Zugang entziehen, in denen also eher *fingiert* als *konstruiert* wird.

war auf ein weitreichendes Phänomen gestoßen: eben das mathematische Chaos.¹⁶

Was man darunter versteht, läßt sich am besten an einem einfachen Beispiel demonstrieren. Wir betrachten die Vorschrift: „Nimm irgend eine reelle Zahl und verdopple sie!“ Mathematiker schreiben dafür kurz $x \rightarrow 2x$ oder noch schlichter $f(x) = 2x$. Das ist eine sehr einfache und sehr „anständige“ Funktion oder Abbildung. Sie ist integrierbar, stetig, differenzierbar, sie hat einen sehr einfachen Graphen, nämlich eine Gerade, und man kann sie für jedes x sehr leicht ausrechnen.

Nun wollen wir für ein bestimmtes x , das wir als „Startwert“ wählen und das wir deshalb x_0 nennen, die Vorschrift anwenden und das Ergebnis x_1 nennen. Dann besteht die Gleichung $x_1 = 2x_0$. Auf das so erhaltene x_1 wenden wir nun erneut unsere Vorschrift an und nennen das Ergebnis x_2 . Das ergibt die Gleichung $x_2 = 2x_1$. Und in dieser Weise fahren wir fort: jedesmal, wenn wir irgendein x_n erhalten haben, wenden wir unsere Vorschrift darauf an und erhalten ein neues x_{n+1} mit der Gleichung $x_{n+1} = 2x_n$. Mathematiker nennen so eine Vorschrift eine Iteration. Schauen wir uns an, was dabei passieren kann, wenn wir diese Iteration mit einem neuen, vom ersten etwas verschiedenen Startwert y_0 wiederholen. Das Ergebnis ist von beinahe enttäuschender Schlichtheit: In jedem Iterationsschritt wird der x - bzw y -Wert verdoppelt, und auch der ursprüngliche Abstand zwischen x_0 und y_0 verdoppelt sich mit jedem Schritt. Wir können also z.B. getrost behaupten, daß der Abstand zwischen zwei Startwerten, der am Anfang 1 war (wenn wir etwa $x_0 = 3$ und $y_0 = 4$ gewählt haben), nach 10 Iterationsschritten 1024 sein wird. Nichts daran ist überraschend, wir können unseren Iterationsprozeß prognostisch überschauen; d.h. wir können, wenn wir nur den Startwert kennen, ohne Kenntnis der Zwischenschritte, gewissermaßen „auf Anhieb“ sagen, welcher Wert sich nach 15 Iterationsschritten ergeben wird.

Vielleicht sagen Sie sich jetzt: „Was soll denn das? Da verspricht einer, vom Chaos zu reden, und dann kommt er mit völlig regulären, vorhersehbaren Rechnereien daher!“ Nun: ich bin gerade dabei, die Kurve zu nehmen. Stellen Sie sich jemanden vor, den es stört, daß die Zahlen bei unserer Iteration immer größer werden — wenn wir nicht gerade mit $x_0 = 0$ begonnen haben. Er ergänzt also unsere Vorschrift folgendermaßen:

Der Startwert soll echt zwischen Null und Eins liegen, und jedesmal, wenn die Iterationsvorschrift einen Wert ergibt, der größer ist als Eins, dann wird einfach 1 abgezogen.

Das sieht alles ebenfalls sehr einfach aus. Mathematiker schreiben für die geänderte Vorschrift üblicherweise

$$0 < x_0 < 1$$
$$x_{n+1} = 2x_n \bmod 1.$$

Und nun stellen wir erneut die Frage nach der Möglichkeit, vorherzusagen, wie sich zwei zunächst nahe beieinander liegenden Startwerte im Laufe der Iteration voneinander entfernen. Ich habe als Beispiel für meinen Taschenrechner die Werte $x_0 = 0,323$ und $y_0 = 0,324$ gewählt und folgendes festgestellt: Nach zehn Iterationsschritten hat sich der ursprüngliche Abstand von einem Tausendstel auf 21 Tausendstel vergrößert, nach weiteren fünf Schritten aber plötzlich auf den Wert 0,768; und nach wiederum zwei Schritten ist der neue Wert nur noch 0,072, also ein knappes Zehntel des vorher genannten.

Es sieht bei diesem Beispiel also ganz schlecht aus mit der Vorhersage, wie sich zwei ursprünglich eng benachbarte Werte voneinander entfernen und wieder annähern. Wenn wir es dennoch wissen wollen, dann hilft nur eins: alle Iterationsschritte schön der Reihe nach ausrechnen. Für diesen Sachverhalt können wir

¹⁶ Einer der Pioniere dieser Forschungsrichtung, DAVID RUELLE, hat darüber ein populäres Büchlein geschrieben, das weitgehend ohne technischen Apparat auskommt und dennoch sehr informativ ist: [Rue92].

— nach einem Vorschlag von RUDOLF KÖTTER — sagen, die Folge der iterierten Werte ist „minimal prognostizierbar.“ In der Sprache der Chaos-Theoretiker liegt das daran, daß unser Iterationsverfahren eine sogenannte „empfindliche Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen“ besitzt, oder, wie man auch sagt: es gilt hier nur

das schwache Kausalitätsprinzip: gleiche Startwerte produzieren gleiche Folgewerte.

Aber es gilt nicht

das starke Kausalitätsprinzip: ähnliche Startwerte produzieren ähnliche Folgewerte.

Dies, zusammen mit ein paar weiteren Eigenschaften unserer Zuordnungsvorschrift, auf die ich hier nicht eingehen will, sichert, daß sie im Jargon der Mathematiker ein chaotisches System darstellt, genauer ein System mit deterministischem Chaos, weil ja jeder Wert nach einer strengen, „deterministischen“ Vorschrift aus seinem Vorgänger berechnet wird.

Was haben wir nun mit diesem einfachsten aller chaotischen Systeme gewonnen? Zunächst kann bei ihm keine Rede davon sein, daß die minimale Prognostizierbarkeit auf einem fehlenden Kausalwissen beruhe. Im Gegenteil: alles, was man braucht, um die Folge zu berechnen, ist ein Startwert und die obige Vorschrift. Trotzdem können wir nicht sagen, wie der Wert nach — sagen wir — dem tausendsten Iterationsschritt aussieht, wenn wir nicht alle davorliegenden Werte kennen.

Die Idee ist nun, diesen Sachverhalt zu nutzen, um unser einfaches chaotisches System zu einem Zufallsgenerator auszubauen. Das hat den Vorteil, daß wir dazu nicht auf empirisches Kausalwissen zurückgreifen müssen. Wenn es gelingt, dann haben wir den Zufall tatsächlich „in die Mathematik hereingeholt.“ Zufällig ist ein Ereignis demnach, wenn es von einem Zufallsgenerator erzeugt wird, der auf einem chaotischen System beruht.

Es ist eine methodische Pointe, nach dieser Klärung zu sagen, daß wir reale Zufallsgeneratoren, wie etwa den Würfel, auf dieser Basis erst dann als guten Zufallsgenerator ansehen dürfen, wenn es gelingt, für seine Benutzung ein mathematisches Modell anzugeben, das ebenfalls auf einem chaotischen System beruht. Das Prinzip des fairen Spiels, von dem am Anfang die Rede war, heißt in der neuen Sprache: Benutze Zufallsgeneratoren nur dann, wenn sie diese Bedingung erfüllen. Es spricht einiges dafür, daß die üblicherweise benutzten Glücksspielgeräte sich auf diese Weise in die Form mathematischer Modelle von chaotischen Systemen bringen lassen.

Leider ist die mathematische Chaosforschung noch nicht soweit, daß man für ein beliebiges (in Form von Gleichungen) vorgelegtes System auf einfache Weise entscheiden kann, ob es chaotisch ist oder nicht. Aber das ist nicht der springende Punkt. Wichtig ist, daß man *einige solche Systeme kennt*, denn das genügt, um auf diese Weise einen „innermathematischen“ Zufallsbegriff zu etablieren.

Wenn Sie mich also jetzt am Ende meiner Schilderungen fragen: „Wie kommt denn nun der Zufall in die Mathematik?“, dann zeige ich auf einen Zufallsgenerator, der auf einem chaotischen System beruht, und antworte:

„So kommt der Zufall in die Mathematik!“

Literatur

- [Ber88] JAKOB BERNOULLI. *Ars conjectandi*. In: Ivo Schneider (Hrsg.), *Die Entwicklung der Wahrscheinlichkeitstheorie von den Anfängen bis 1933. Einführungen und Texte*, Kapitel 2, S. 62–68. Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt, 1988.
- [Hil71] DAVID HILBERT. *Die Hilbertschen Probleme*, Band 252 der Reihe Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften. Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig K.G. Leipzig, 1971. Erläutert von einem Autorenkollektiv unter der Redaktion von P. S. Alexandrov.
- [Kri63] Klaus Krickeberg. *Wahrscheinlichkeitstheorie*. Mathematische Leitfäden. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Stuttgart, erste Auflage, 1963. Serienherausgeber Gottfried Köthe.
- [LV93] MING LI / PAUL VITÁNYI. *An Introduction to Kolmogorov Complexity and its Applications*. Texts and Monographs in Computer Science. Springer Verlag New York et al., 1993.
- [Rén72] ALFRÉD RÉNYI. *Briefe über die Wahrscheinlichkeit*. Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, zweite Auflage, 1972.
- [Rue92] DAVID RUELLE. *Zufall und Chaos*. Springer-Verlag, Berlin u. a., erste Auflage, 1992. 1. korrigierter Nachdruck 1993.
- [Sch78] MICHAEL SCHULTE (Hrsg.), *Alles von Karl Valentin*. R. Piper & Co. Verlag, München Zürich, 1978.
- [Sch88] IVO SCHNEIDER (Hrsg.), *Die Entwicklung der Wahrscheinlichkeitstheorie von den Anfängen bis 1933*. Einführung und Texte. Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt, erste Auflage, 1988.
- [uOS75] PAUL LORENZEN und OSWALD SCHWEMMER. *Konstruktive Logik, Ethik und Wissenschaftstheorie*. Nummer 700 der BI Hochschultaschenbücher. Bibliographisches Institut Mannheim/Wien/Zürich, zweite, verbesserte Auflage, 1975. Erste Auflage 1973.
- [Vil39] J. VILLE. *Étude Critique de la Notion de Collectif*. Vol. 3 des Monographies des Probabilités. Gauthier-Villars Paris, 1939. Publiées sous la direction de M. ÉMILE BOREL.
- [vM19] RICHARD VON MISES. Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung. *Mathematische Zeitschrift*, Band 5, S. 52–99, 1919.
- [vS88] MARIAN VON SMOLUCHOWSKI. Über den Begriff des Zufalls und den Ursprung der Wahrscheinlichkeitsgesetze in der Physik. In: Ivo Schneider (Hrsg.), *Die Entwicklung der Wahrscheinlichkeitstheorie von den Anfängen bis 1933*. Einführungen und Texte., S. 79–98. Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt, erste Auflage, 1988.